

A note on equivalent circles, square, and rectangles 等価な円、正方形、および矩形の照射野に関するノート

B. E. Bjärngård, R. L. Siddon

Med. Phys., 9 (2) 258-260, 1982

光子の円形ビームの中心の散乱線量は級数展開で表わすことができ、その級数の第1項は円形ビームの半径に比例する。この第1項のみを散乱線積分に用いると、この式は任意の形状の照射野の輪郭までの平均半径 \bar{r} に比例することになる。正方形の場合、その一辺の長さ s と平均直径 $d=2\bar{r}$ の比率は $s/d=0.891$ となり、この比は小照射野における等価円形照射野と等価正方形照射野の関係である。矩形照射野の場合には、 \bar{r} は矩形比率である elongation ratio によって緩やかに増加する関数を乗じた面積周囲長比で与えられる。散乱線を説明するために級数展開の線形項のみを用いた場合に生じる誤差項は種々の状況で小さい。

はじめに

外照射光子ビームの線量計算で使われる等価な円形、正方形、および矩形な照射野の間の関係は、種々の形状の照射野の散乱線積分にもとづいており、中心線上で同じ散乱線/一次線線量比となるような円形、正方形、および矩形の照射野を見つけることである¹ (注1、以下注とあるのは保科による付記である)。この定義は明瞭であり、その関係は十分に調べられているが、正方形照射野の一辺に等価な直径 d が $s/d=0.891$ で与えられる理由、あるいは面積周囲長比が矩形照射野の有効なパラメータである理由については説明されていない² (注2)。等価な円形、正方形および矩形の照射野の間のこの関係が光子のエネルギーや計算深部に本質的に影響されないということの理由については、文献的に見当たらない。最近、線量計算時間の短縮をするために計算手法を近似する可能性を検討していた中で、この関係の物理的、数学的背景について新たな考えを我々は得た。我々の考えが放射線物理の他の研究者にとって価値あるものであることを希望して、ここに我々の知見を示すものである。

◆ 注1 Day の見解

一般に、矩形照射野の後方散乱と深部線量は面積が等しい円形や正方形の照射野に比して小さい。その差は "elongation" やその他の変数に依存する。適当な補正係数 ("elongation factor") は、ある範囲の矩形照射野での実測値や数学的な手法により求められかも知れない。しかし、実際は複雑であるので、等価照射野法で簡単に行った。

◆ 注2 Sterling の面積周囲長比

円形照射野であれば直径、正方形照射野であれば辺の長さがその照射野の代表尺度として個々の照射野の大小比較に使える。しかし $W \times L$ の矩形照射野の各辺の長さはそのままでは比較に用いることはできない。Sterling 等が行った方法は照射野サイズを $WL/[2(W+L)]$ である「面積周囲長比」という名目尺度で置き換え、これを変数として深部線量百分率を照射野サイズと深さの関数化することに成功したものである。具体的には、深部線量百分率を次のような形式で回帰するものである。

$$\log PDD(A/P, d_i) = a_i + b_i \log(A/P)$$

ここで、 a_i と b_i は深さ d_i において一次式で表される。

Sterling の行った方法は A/P 値を用いると、深部線量百分率の回帰が良好な結果が得られたというものである。このことにより、深部線量百分率の照射野間の内挿が容易になると同時に、完全な表形式の深部線量百分率表を用意する必要がなくなった。しかし、 A/P 値が最適な変数であることの理論的説明や矩形に対する等価照射野との関係については言及されていない。

Bjärngård のこの論文はまさにこの二点について説明がなされている

方法

外照射光子ビームによって生じる線量は、照射容積に入射する一次光子による線量と、一次光子によって発生し、この容積内で相互作用する散乱光子による線量に分けることができる。点 Q において、密度 1 の均一な媒質に垂直に入射する均一なビーム内の散乱線/一次線線量比 (注3) は、次のよ

うに書ける.

$$S(Q) = \frac{1}{2\pi} \oint S(r) d\theta \quad (1)$$

ここで積分は照射野の周囲 r に沿って行い, $d\theta = (r \times dr)/r^2$ である. 関数 $S(r)$ は半径 r の円形照射野の中心軸上の点における散乱線/一次線線量比である.

$S(r)$ を近似するために, 種々の解析学的式が作られてきた. 例えば, 次式をうまく利用した.

$$S(r) = S_{\infty} (1 - e^{-\lambda r} - \mu \lambda r e^{-\lambda r}) \quad (2)$$

ここで S_{∞} , λ および μ は深さとエネルギーによって変化する定数である¹ (注4). r が小さい場合には, この式は次のようになる.

$$S(r) \approx ar \quad (3)$$

ここで, $a = \lambda(1 - \mu)S_{\infty}$ である. 一般的には, $S(r)$ は次のように表すことができる.

$$S(r) = ar + g(r) \quad (4)$$

ここで g は r が小さい場合には無視できる. 円形もしくは矩形照射野の中心軸上(ここで考えているのは単に幾何学的な意味である)の点 Q において, 等式(1)は次式となる.

$$S(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ar d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(r) d\theta \quad (5)$$

初項は点 Q から照射野辺縁までの距離の平均を \bar{r} とすると, 簡単に $a\bar{r}$ となる.

この研究の最初の目的は, 次式で示される初項の挙動を調べることにある.

$$a\bar{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ar d\theta \quad (6)$$

次に, 次式に関して幾つかの結論も導くこともできる.

$$S(\bar{r}) = a\bar{r} + g(\bar{r}) \quad (7)$$

円形ではない照射野の場合には, この式は等式(5)の $S(Q)$ とは異なり, 次式のように書くことができる.

$$S(Q) = a\bar{r} + \bar{g} \quad (8)$$

照射野が小さい場合には, 等式(7)と(8)の第2項は小さい値となるであろう. ここで, \bar{r} は等価円形照射野の半径とする.

◆注3 散乱係数 = (一次線 + 散乱線) / 一次線 = $1 + (\text{散乱線} / \text{一次線})$ で表される. この (散乱線 / 一次線) のことである.

◆注4 Day の方法

任意の照射野の深部線量を求める物理的基本原理は Clarkson(1941), Meredith and Neary(1944) の「矩形照射野の散乱線量は円形照射の深部線量の測定値から求めた散乱線 vs 半径曲線の積分により計算できる」による. 上記の若者達が用いた散乱線 vs 半径曲線の近似式が本文中の等式(2)である. $S(r)$ は半径 r の照射野の散乱線量, S_{∞} は無限半径の照射野の散乱線量であり, 照射野の大きさには独立であるから定数と考えられる.

◆注5 式(2)から式(3)への展開 [$e^{-\lambda r}$ の Taylor 展開]

$e^{-\lambda r} = 1 - \lambda r + \frac{(\lambda r)^2}{2} - \dots$ である. ゆえに,

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda r} - \mu \lambda r e^{-\lambda r} &= 1 - \left(1 - \lambda r + \frac{\lambda^2 r^2}{2} - \dots \right) - \mu \lambda r \left(1 - \lambda r + \frac{\lambda^2 r^2}{2} - \dots \right) \\ &= \lambda r - \frac{\lambda^2 r^2}{2} - \mu \lambda r + \mu \lambda^2 r^2 - \frac{\lambda^3 r^3}{2} + \dots \\ &= \lambda r - \mu \lambda r \quad (\because r < 1) \\ &= \lambda r (1 - \mu) \\ \therefore S(r) &= S_{\infty} \lambda r (1 - \mu) = ar = \text{Eq.(2)} \end{aligned}$$

正方形照射野の等価円

一辺が s の正方形照射野の中心軸上の点において、式(6)の積分の結果は次のようになる。

$$\bar{r} = \frac{2s}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (9)$$

辺の長さ s と平均直径 $d = 2\bar{r}$ の比率は $s/d = \pi/4 \ln(1 + \sqrt{2}) = 0.891$ である。小照射野の場合、これは等価円と正方形の関係でもある（注6）。

◆ 注6 式(9)の導出

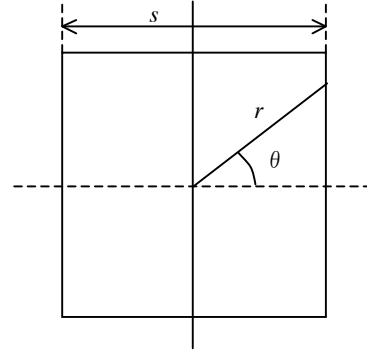
正方形照射野の中心から辺縁までの距離 r の平均は、図形の対称性より区間 $[0, \pi/4]$ の平均が全体の平均である。また、

$$r^2 = (s/2)^2 + (r \sin \theta)^2$$

$$\therefore r = \frac{s}{2 \cos \theta}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{s}{2 \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{2s}{\pi} \left[\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta} \right) \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{s}{\pi} \log(\sqrt{2} + 1)^2 \\ &= \frac{2s}{\pi} \log(\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$



矩形照射野に等価な円形と正方形

大きさが $L \times W$ の矩形照射野の中心軸上の点において、式(6)の積分は次式で与えられる。

$$\bar{r} = \frac{1}{\pi} \left(L \cdot \ln \frac{D+W}{L} + W \cdot \ln \frac{D+L}{W} \right) \quad (10)$$

この式で D は矩形の対角線の長さである。正方形の場合には $L=W$ であるので、この式は式(9)になる。（注7）

◆ 注7 方法は式(9)と同じであるが、辺の長さの変数 W と L を残さなければならないので、矩形の第1象限を対角線によって二分した領域で平均半径を求める。

区間 $[0, \pi/4]$ の平均半径は、

$$\frac{W}{2} \frac{1}{2} \ln \frac{D+L}{D-L} = \frac{W}{2} \frac{1}{2} \ln \frac{(D+L)^2}{D^2 - L^2} = \frac{W}{2} \frac{1}{2} \ln \frac{(D+L)^2}{W^2} = \frac{W}{2} \ln \frac{D+L}{W}$$

区間 $[\pi/4, \pi/2]$ の平均半径は、

$$\frac{L}{2} \frac{1}{2} \ln \frac{D+W}{D-W} = \frac{L}{2} \ln \frac{D+W}{L}$$

となる。この両式の和を区間 $\pi/2$ で割ることにより、式(10)が得られる。

この \bar{r} は等価円形照射野を定義するので、矩形照射野に等価な正方形は式(9)と(10)を組み合わせることとで得られる。それは次式で与えられる。（注8）

$$s = \frac{2LW}{L+W} \frac{1}{4 \ln(1+\sqrt{2})} \left[\left(1 + \frac{L}{W}\right) \ln \frac{D+W}{L} + \left(1 + \frac{W}{L}\right) \ln \frac{D+L}{W} \right] \quad (11)$$

$$= \frac{2LW}{L+W} \cdot Y(L/W)$$

Sterling² が提示したように、矩形照射野に等価な正方形は周囲長に対する面積の比率が同じであ

◆注 8 式(11)の 4A/P 以外の項の導出

\bar{r} は等価円形照射野の半径であるので、これを媒介変数として式(9)と(10)を組み合わせると、矩形照射野に対する等価正方形照射野の一边が定まる。

$$2s \ln(1+\sqrt{2}) = L \ln \frac{D+W}{L} + W \ln \frac{D+L}{W}$$

$$\therefore s = \frac{1}{2 \ln(1+\sqrt{2})} \left[L \ln \frac{D+W}{L} + W \ln \frac{D+L}{W} \right]$$

$$= \frac{2LW}{L+W} \frac{1}{4 \ln(1+\sqrt{2})} \frac{L+W}{LW} \left[L \ln \frac{D+W}{L} + W \ln \frac{D+L}{W} \right]$$

る、すなわち $s=2LW/(L+W)$ であるという仮定にもとづくとして、小照射野での誤差は式(11)中の因子 $Y(L/W)$ で説明される。Y の値を Table I に示す。

Table I. 式(11)で定義される係数 $Y(L/W)$ は矩形照射野 $L \times W$ に等価な正方形を見つけるための面積周囲長比を用いたときの小照射野における誤差を説明する。

L/W	Y(L/W)
1.0	1.000
1.5	1.008
2.0	1.024
2.5	1.041
3.0	1.059
3.5	1.077
4.0	1.094
4.5	1.110
5.0	1.125

検討

正方形の一边と平均直径 $d = 2\bar{r}$ の関係である $s/d=0.891$ は、小照射野に対して Day¹ が与えた等価円形照射野のそれそのものである。したがって、このように制約された場合には、平均半径が散乱線を決める。当然、これは $g(r)$ が小さいので式(5)でも表わすことができる。しかし、このことは一般的に適當であるとは思えない。また、ある点への散乱線量は照射野の面積によって決まるものと考えられるということが文献にみられる。例えば、Day¹ は「(比率 s/d の) 値は、対応する円形と同じ面積の等価正方形での値である $\sqrt{2}/2=0.886$ とはわずかに異なるということが示される」と述べている。この説明は、面積が重要であるという物理的理由がないので誤解を招く。上記で示したように、照射野論郭までの平均半径 \bar{r} が意味のあるパラメータであり、面積が同じということにもとづく値(0.886)よりも Day¹ が計算したデータにうまく合う。似たように仮定は Edward と Coffey^{3,4} の最近の二つの論文にもある。彼等は三角形の一つの頂点が計算点であるような三角形の実効半径を、その三角形と同じ面積となる同じ角度と半径をもつ扇形で置き換えることで見出している。

Day¹ によって表にされたように、 s/d の値は大照射野で幾分増加し、30 cm 直径の照射野で約 1.5% である。このことは、このような大きな照射野の中心における散乱線を計算するために \bar{r} を用いれば、式(4)の項 $g(r)$ は無視できるものではないが、誤差はかなり小さくなるだろうということを意味する。この多少驚くような結果も、 \bar{r} を用いて誤差を、すなわち次式で示すように式(7)と(8)の差を調べれば驚くにあたらない。

$$\Delta S = S(Q) - S(\bar{r}) = \bar{g} - g(\bar{r}) \quad (13)$$

正方形照射野のコーナーにある点の場合、 r は最小の $r=s/2=0.891$ から最大の $r=s/\sqrt{2}=1.26\bar{r}$ まで変化する。この範囲における $g(r)$ の変化の仕方は小さいので、また項 $g(r)$ は普通の照射野サイズでは項

ar よりも小さいので、誤差 Δ は小さいであろう。別の言い方をすると、Day¹の表の s/d のわずかな変化から明らかであるが、実効半径は平均半径に近いものである。

矩形照射野の場合、式(11)より面積周囲長比は照射野が小さければ、そのような照射野の散乱線を決める主たる因子である。残りの因子 Y は Table I に示すように矩形比率 L/W によって緩やかに変化する。矩形比率が $L/W=3$ と 5 の場合、この関数は矩形比率が 1 、すなわち正方形の関数値と比較してそれぞれ 6% と 13% 以上その値を変えることはない。したがって、矩形に等価な正方形は同じ面積周囲長比をもつ正方形に近く、また誤差が矩形比率によって増加するけれども、広い範囲の矩形比率においてこの仮定を用いることができると結論される(このことは異なる観点から行った Sterling² によって観察されたことである)。しかし、正方形照射野で示されたことと同様の誤差に関する考察にもとづくと、上記の結論は厳密には小照射野のみで正しいことである。しかし、実際にはかなり広い範囲の照射野サイズで良好な精度を保つことが、また散乱線の線形近似が有効であることが予想される。

式(3)の a はエネルギーと注目している深さに依存するけれども、平均半径 \bar{r} は厳密には幾何学的パラメータであり、エネルギーや深さといったパラメータには依存しない。さらに、広い範囲の照射野サイズにおいて $S(\bar{r})$ は真の散乱線量の良好な近似であるので、等価な円形、正方形および矩形の間の関係は光子のエネルギーと注目している深さにはまったく独立でなければならない。当然、このことは正確な計算と同時に実験結果によって確認されるものである¹。

結論

散乱した光子の挙動に関する外照射ビームの線量分布の計算上重要な幾つかの点は、一次近似として照射野の小さい扇形の部分から点までの散乱線の寄与は、この扇形の半径に比例するというのを認識したならば容易に理解できる。したがって、照射野辺縁までの平均半径は等価円形照射野の半径となる。このモデルは、小さい照射野における等価正方形と等価円形が $s/d=0.891$ の関係にある理由を説明している。また、矩形照射野に等価な正方形照射野を決めるために面積周囲長比が利用できる理由と、この方法に固有の誤差が矩形の矩形比率に伴って増加する理由を説明している。さらに、小照射野における等価な円形正方形および矩形間の関係は、深さとエネルギーに独立である。上記の見解は数学的には小照射野でのみ妥当であるが、そこで生じる誤差を考えると、散乱線が半径に比例するという仮定が有効と考えられる照射野サイズよりも広い範囲の照射野サイズにおいて、照射野輪郭までの平均半径は照射野中心軸における散乱線を良好な精度で決定する量であることが分かる。文献^{1,3,4}で言われてきたところの散乱線は面積に比例するという概念的なモデルは大きな誤差を招くことはないが、根本的なところで誤解をまねく。

参考文献

- 1 M. J. Day, Brit. J. Radiol. Suppl. 11, 95 (1972).
- 2 T. D. Sterling, H. Perry, and L. Katz, Brit. J. Radiol. 37, 544 (1964).
- 3 F. H. Edwards and C. W. Coffey, Radiology, 132, 193 (1979).
- 4 F. H. Edwards and C. W. Coffey, Med. Phys. 8, 228 (1981).